Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

2. Übungsblatt zur Lineare Algebra I

Beweisverfahren, Bilder, Urbilder, Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

Aufgabe 1. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P)

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Mengen $f^{-1}(\mathbb{Z})$ und $f(f^{-1}(\mathbb{Z}))$.

(b) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. A, B seien Teilmengen von X und C, D seien Teilmengen von Y. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(ii) $C \supseteq f(f^{-1}(C))$.

(iii) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Begründen Sie außerdem, warum im Allgemeinen für (i) und (ii) nicht die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P)

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(i) $f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$.

(ii) $f_2\colon \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}\backslash\{\frac{a}{c}\},\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc \neq 0$.

(iii) $f_3\colon \{\text{rot}, \text{blau}, \text{gelb}, \text{grün}\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit $f_3(\text{rot}) = 1$, $f_3(\text{blau}) = 3$, $f_3(\text{gelb}) = 1$ und $f_3(\text{grün}) = 4$.

(iv) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{, falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 20. 11. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 1P+1P+1P+1P)

(a) Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X, Y, Z. Zeigen Sie:

$$f\colon X \to Y \text{ und } g\colon Y \to Z \text{ injektiv (surjektiv)} \implies g \circ f\colon X \to Z \text{ injektiv (surjektiv)}$$

(b) Es seien X, Y Mengen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ beziehungsweise $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ die Identitäsabbildungen auf X beziehungsweise Y.

(i) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
Hinweis: Für die Richtung „⇒“dürfen Sie das Auswahlaxiom annehmen. Das heißt für jede Menge A existiert eine Auswahlfunktion $h\colon \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\} \to A$, sodass $h(B) \in B$ gilt für jedes $B \in \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\}$.

Folgern Sie aus (i) und (ii), dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann bijektiv ist, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1P+3P)

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Ist n^3 eine gerade Zahl, so ist auch n eine gerade Zahl.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$f \circ f(n) < f(n+1) \qquad (*)$$

gilt. Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ f(n) = n$.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $f(k) \geq n$ für alle $k \geq n$ gilt und danach, dass $f(n+1) > f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.)

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 20. 11. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.